

# TD 34 : Théorie de l'intégration

## Calcul d'intégrales (piqûre de rappel)

**1** ★★ (Calcul d'intégrales) Calculer les intégrales suivantes :

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\int_0^1 t^2(t^3 + 1)^5 dt$                          | 5) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin t + \tan t}$ |
| 2) $\int_{\ln 3}^{\ln 7} \frac{dt}{1 - 4e^{-2t}}$        | 6) $\int_1^8 \frac{dt}{2\sqrt[3]{t} - 1}$                            |
| 3) $\int_2^5 \frac{dt}{t^2 - t}$                         | 7) $\int_1^2 \frac{t+1}{t^2 - t - 6} dt$                             |
| 4) $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) dt$                       | 8) $\int_{-2}^2 t t  dt$   |
| 9) $\int_{-1}^1 \frac{t}{(t^2 + t + 1)(t^2 - t + 1)} dt$ |  |

**2** ★★ Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 t e^{i2\pi t} dt \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^{it} + 1} dt$$

## Propriétés de l'intégrale

**3** ★★ Pour chacune de ces fonctions, donner l'ensemble de définition, de dérivabilité puis calculer la dérivée :

$$f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t^2 + 1} dt \quad g : x \mapsto \int_2^{2x} \frac{1}{\ln t} dt$$

$$h : x \mapsto \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \arctan(t^2) dt$$

**4** ★★ Déterminer les limites suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ | 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} dx$ |
| 3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sqrt{1+x^n} dx$    |  |

**5** ★★ Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $f \leq 1$  et  $\int_0^1 f = 1$ . Montrer que  $f \equiv 1$ .

**6** ★★ (Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

1) On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ . Montrer que

$$\int_a^b f(t) \sin(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

2) Montrer que le résultat est encore vrai si  $f$  est en escalier sur  $[a, b]$ .

3) En déduire que le résultat est encore vrai si  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$ .

**7** ★★★ Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ . Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt \iff f \geq 0 \text{ ou } f \leq 0$$

**8** ★★★ Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  une fonction telle que  $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$ . Montrer que  $f$  admet un point fixe.

## Formules de Taylor

**9** ★ Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

En déduire, pour tout réel  $x$ , la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

**10** ★ Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left| \sin x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) \right| \leq \frac{|x|^7}{7!}$$

**11** ★★ Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  une fonction convexe et  $a \in \mathbb{R}$ . Par la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$$

Quel résultat connu retrouve-t-on ainsi ?

**12** ★★ Pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt$$

- 1) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . On pourra intégrer par parties.
- 2) Montrer que  $f$  possède une limite finie en 0 que l'on déterminera. On pourra étudier le comportement quand  $x$  tend vers 0 de

$$\int_x^{2x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

**13** ★★ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- 1) En justifiant sa validité, écrire la formule de Taylor avec reste intégral d'ordre  $n$  en 0 pour la fonction  $f : x \mapsto \ln(1+x)$ .
- 2) En déduire la limite de la suite de terme général

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Sommes de Riemann

**14** ★★ Calculer les limites suivantes :

- 1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$
- 2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}$
- 3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$
- 4)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{2^1} + \dots + \sqrt[n]{2^n}}{n}$

**15** ★★ En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent pour les suites suivantes :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^3}$$

**16** ★★ Est-ce que l'application  $f : x \mapsto \sqrt{x}$  est uniformément continue sur  $]0, 1]$  ? Et sur  $[1, +\infty[$  ? En déduire si  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

Même questions pour  $g : x \mapsto \ln x$  sur  $]0, 1]$ , puis  $[1, +\infty[$  et enfin  $\mathbb{R}_+^*$ .

**17** ★★ Soit  $f : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application uniformément continue. Montrer que  $f$  est bornée. Le résultat est-il encore vrai si  $f$  est seulement supposée continue ?

**18** ★★ Soit  $f : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application uniformément continue. L'objectif est de montrer que  $f$  admet une limite finie en 0.

- 1) Soit  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite quelconque à valeurs dans  $]0, 1]$  qui tend vers 0. Justifier que la suite de terme général  $f(x_p)$  admet une sous-suite convergente. On pourra utiliser sans démonstration le résultat que toute fonction uniformément continue sur  $]0, 1]$  est bornée (cf exercice précédent).

On note  $\varphi$  une extractrice pour laquelle la suite de terme général  $f(x_{\varphi(p)})$  converge et on pose  $\ell = \lim_{p \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(p)})$ .

L'objectif est de montrer que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ell$ . Dans la suite,

on pose  $u_n = f(x_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- 2) On se fixe  $\varepsilon > 0$  et on se donne  $\delta > 0$  tel que pour tous  $x, y \in ]0, 1]$ , on a

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

- (a) Montrer qu'on peut choisir  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $|f(x_{\varphi(N)}) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  et  $x_{\varphi(N)} \leq \delta$ .
- (b) En déduire que si  $x \leq \delta$ , on a  $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ . Conclure.